Παρουσίαση μουσικολογικής μελέτης,

στο 2ο διεθνές συνέδριο

του

Αμερικανικού Ιδρύματος Βυζαντινής Μουσικής και Υμνολογίας

του

Δημητρίου Ανδριώτη

<u>με θέμα:</u>

Κατατομή κανόνος (με 6 τρόπους) και παραγωγή της σκληρής Πυθαγορείου κλίμακος. Συγκερασμός αυτής σε 53 κόμματα.

Αθήνα 2009

Εις ανάμνησιν

της 29ης Μαΐου, εν έτει 1453 μ.Χ.

της *αποφράδος* εκείνης ημέρας Τρίτης

ΕΑΛΩ Η ΠΟΛΙΣ

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Τα μέλη της Επιτροπής του 1881, δεν μεταχειρίσθηκαν κανέναν τρόπο χωρισμού της αρμονίας, όπως για παράδειγμα ο Πυθαγόρας στην Κατατομή Κανόνος ή ο Χρύσανθος με πειράματα επί χορδής μονοχόρδου, μήκους 108 cm κλπ.

Λέγοντας αρμονία, εννοούμε το μουσικό διάστημα με λόγο 2/1, το και οκτάχορδο (8χ) καλούμενο, όταν αναφερόμεθα σε οκτάφθογγες κλίμακες.

Η επιτροπή «δανείστηκε» τον υπάρχοντα χωρισμό σε 12 ίσα τμήματα (ημιτόνια), που χρησιμοποιεί η δυτική μουσική.

Χώρισε το κάθε ημιτόνιο σε 3 ίσα μέρη και κάλεσε αυτά μόρια.

Η αρμονία χωρίζεται πλέον σε 12x3=36 μόρια. Αργότερα, μάλλον για λόγους εντυπωσιασμού και όχι γιατί πίστευε ότι δεν είναι επαρκής αυτός ο χωρισμό της, διπλασίασε τα μόριά της σε 72 (ή διαίρεσε το ημιτόνιο σε 6 ίσα μέρη: 12x6=72).

Αυτός ο χωρισμός δεν είναι τίποτε άλλο, από μια λεπτομερέστερη απεικόνιση της ευρωπαϊκής κλίμακας, διότι με αυτόν τον συγκερασμό, προκύπτει η ευρωπαϊκή κλίμακα Τ-Τ-Η-Τ-Τ-Τ-Η ως εξής: 12-12-6-12-12-12-6, όπως στον Γ΄ ήχο, για παράδειγμα, όπου από τότε έως σήμερα, «διδασκόμεθα» και «ψάλλουμε».

Δεν μπορεί όμως να είναι ποτέ το Η, ίσο με το μισό του τόνου(*), γι' αυτό το λόγο στην Πυθαγόρεια κλίμακα ονομάζεται λήμμα (Λ), ήτοι Τ-Τ-Λ-Τ-Τ-Τ-Λ.

Ως εκ τούτου, ***η κλίμακα δεν μπορεί να έχει εξ αρχής ζυγό αριθμό κομμάτων, αλλά περιττό.***

** Οι αποδείξεις των ισχυρισμών ή μαθηματικών τύπων, όπου στην εν λόγω παρουσίαση παραλείπονται, γράφονται με **έντονη** πλάγια **γραφή**, ενώ παρουσιάζονται όλες σε έτερον υπό έκδοση πόνημα.*

Βασικές έννοιες

Διαστήματα

Κάθε ζεύγος μουσικών φθόγγων, μπορούμε να πούμε κατά μια γενική έννοια, ότι αποτελεί ένα **μουσικό διάστημα** ή απλούστερα, διάστημα.

Διάστημα (μουσικό) δ δύο φθόγγων, συχνοτήτων f_1 και f_2, καλούμε το πηλίκο $\delta = \dfrac{\max(f_1, f_2)}{\min(f_1, f_2)}$, $\delta, f_1, f_2 \in \Re$

Αξιοσημείωτοι λόγοι

- 1/1: ομοφωνία ή ταυτοφωνία.
- 2/1: αρμονία ή οκτάχορδο (8χ),
- 3/2 : δι' οξεία (διοξεία) ή πεντάχορδο (5χ).
- 4/3 : συλλαβή (συλλαβά κατά τη Δωρική διάλεκτο) ή τετράχορδο (4χ).
- 9/8 : επόγδοος τόνος (Τ).

Μαθηματικές Πράξεις

Πρόσθεση και Αφαίρεση διαστημάτων

Κατά την πρόσθεση διαστημάτων, πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητικούς λόγους, ενώ κατά την αφαίρεση τους διαιρούμε.

Πολλαπλασιασμός διαστήματος

Για κάθε διάστημα Τ με λόγο δ, ισχύει: $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_n = nT = \delta^n$, με $n \in \mathrm{N}^*$.

Το διάστημα που προκύπτει είναι ένα διάστημα n φορές μεγαλύτερο του αρχικού.

<u>*Διαίρεση διαστήματος*</u>

Με τον όρο διαίρεση διαστήματος, εννοούμε το χωρισμό ενός αρχικού διαστήματος δ, σε δύο μικρότερα, όπου η πρόσθεσή τους, παράγει πάλι το αρχικό διάστημα δ. Αυτό γίνεται με δύο τρόπους διαίρεσης, την **συγκερασμένη** και την **φυσική** διαίρεση.

Συγκερασμένη

Ένα διάστημα δ μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα διαστήματα δ_H, όπου το καθένα ισούται με: $\delta_H = \sqrt{\delta}$.

Φυσική

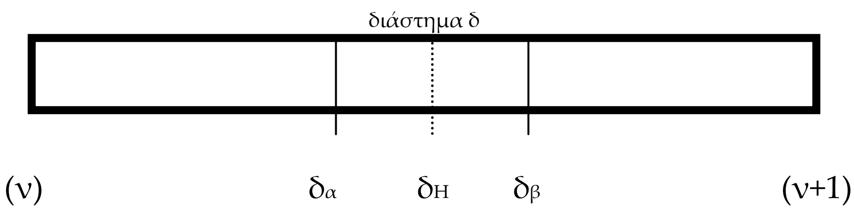
Με φυσική διαίρεση μπορούν να χωριστούν μόνο τα διαστήματα της μορφής $\delta = \frac{\nu+1}{\nu}$, με $\nu \in \mathrm{N}^*$. Ένα τέτοιο διάστημα λέγεται και επιμόριο, διότι έχει λόγο επιμόριο, δύναται να διαιρεθεί σε δύο άνισα διαστήματα, όπου λέγονται και ημιτόνια του δ (Αριστείδης Κοϊντιλιανός, Μιχαήλ Χατζηαθανασίου).

Τα επιμόρια διαστήματα λέγονται και Πτολεμαϊκά. ***Κάθε διάστημα δ μικρότερο της αρμονίας, μπορεί να εκφραστεί με Πτολεμαϊκό διάστημα, με αμελητέο σφάλμα.***

Το αρχικό διάστημα λοιπόν, διαιρείται στα διαστήματα $\delta_\alpha = \frac{2\nu+2}{2\nu+1}$***, και*** $\delta_\beta = \frac{2\nu+1}{2\nu}$***, με*** $\delta_\alpha < \delta_\beta$.

Με τον τρόπο αυτό, το διάστημα δ, διαιρείται σε δύο διαστήματα, όπου είναι συμμετρικά ως προς το μέσον του δ_H***, οπότε ισχύει:***

$$\delta_\alpha < \delta_H < \delta_\beta \quad \textbf{και} \quad \delta_H - \delta_\alpha = \delta_\beta - \delta_H$$



Τα διαστήματα δ_α και δ_β, όπου προκύπτουν από φυσική διαίρεση του διαστήματος δ, είναι συμμετρικά ως προς το μέσον του διαστήματος δ_H, το οποίο προκύπτει από συγκερασμένη διαίρεση του διαστήματος δ

Μετατροπές

Η έκφραση ενός διαστήματος σε αριθμό συγκερασμένων κομμάτων μιας κλίμακος, όταν γνωρίζουμε τον αριθμό υποδιαιρέσεών της, ***μαθηματικά εκφράζεται απ' τον τύπο***:

$$\boldsymbol{k = round\left(N \log_2 \delta\right)}$$

όπου: ***δ*** *οποιοδήποτε μουσικό διάστημα,* $\delta \in \Re_{+}^{*}$

N *το πλήθος των υποδιαιρέσεων της κλίμακος,* $N \in \mathbf{N}$

k *ακέραιος αριθμός υποδιαιρέσεων του διαστήματος δ, με* $k \in \mathbf{N}$ *όταν δ>1*

round *συνάρτηση που στρογγυλοποιεί έναν δεκαδικό αριθμό, στον πλησιέστερο ακέραιο.*

Κλίμακες

Μουσική κλίμακα *ή απλά* ***κλίμακα****, είναι μια διαδοχή διαφορετικών σε οξύτητα φθόγγων, τέτοια ώστε, ο βαρύτερος και ο οξύτερος φθόγγος, να έχουν την ίδια μουσική αξία. Λέγοντας ίδια μουσική αξία, εννοούμε ότι ο βαρύτερος και ο οξύτερος φθόγγος, αποτελούν μουσικό διάστημα με λόγο 2/1, δηλαδή διάστημα αρμονίας.*

Η μελέτη αυτή, αφορά <u>μόνο</u> τα **δομικά στοιχεία** μιας κλίμακος και <u>όχι</u> την **τροπική** ή την **μελική** της συμπεριφορά. Όπως θα δούμε, όσον αφορά την δομική μελέτη, η κλίμακα Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ_Λ είναι η ίδια με την Λ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ (η τροπική δομή αλλάζει – ο τρόπος, όπως λέμε, αλλάζει), ενώ είναι διαφορετική απ' την Λ_Τ_Τ_Τ_Τ_Τ_Λ, πολύ δε περισσότερο απ' την δυτική T_T_H_T_T_T_H (με T=200 cents και H=100 cents)

Υποδιαιρέσεις οκταχόρδου

Ο Ευρωπαϊκός συγκερασμός σε 12 ίσα μέρη.

Η Ευρωπαϊκή μουσικολογία, διαιρεί την κλίμακα σε 1200 μόρια.

Στην Τουρκία, η κλίμακα χωρίζεται σε 53 κόμματα, όπως αναφέρει και ο Τούρκος μουσικολόγος, Rauf Yehta Bey.

Ο Χρύσανθος υποδιαιρεί την κλίμακα σε 68 τμήματα, όπου κάποιες αραβικές περιοχές διατηρούν έως σήμερα.

Η Μουσική Επιτροπή του 1881, του Οικουμενικού Πατριαρχείου, υποδιαιρεί την κλίμακα, σε 36 τμήματα, ενώ αργότερα αναθεωρώντας, τα διπλασίασε σε 72.

Η τελευταία αυτή υποδιαίρεση, εγκρίθηκε και απ' το Οικουμενικό Πατριαρχείο και ισχύει μέχρι σήμερα, διαιωνίζοντας δυστυχώς, το δυτικότροπο συγκερασμό της Βυζαντινής μουσικής κλίμακος και όχι μόνο.

Στην Ινδία, η κλίμακα υποδιαιρείται σε 10600 Senti και από κάθε άποψη, είναι το σύστημα όπου απεικονίζει το οποιοδήποτε διάστημα, με την μεγαλύτερη ακρίβεια.

Υπάρχουν επίσης και οι υποδιαιρέσεις σε 301 Savart και 665 Delfi.

Σήμερα τέλος, κάποιοι μουσικοί και ερευνητές, υποδιαιρούν την κλίμακα σε καινοφανείς αριθμούς κομμάτων, όπως ο συγκερασμός σε 79 κόμματα του Τούρκου μουσικού και κανονιέρη Ozan Yarman, αλλά και ο συγκερασμός σε 64 ή 71 κόμματα.

Διάστημα σε κλίμακα

Υπολογισμός τονικότητας φθόγγου

Ένα διάστημα δ, ανήκει στην κλίμακα Κ, όπου Κ, είναι η αρίθμηση της κλίμακος και υπολογίζεται απ' τον ***μαθηματικό τύπο***:

$$K = [\log_2 \delta]$$

όπου: **[x]** το ακέραιο μέρος ενός δεκαδικού αριθμού x.

Η βασική κλίμακα αριθμείται με τον αριθμό 0, η αμέσως οξυτέρα με το 1, η επομένη με το 2 κοκ. Η βαρυτέρα κλίμακα της βασικής, αριθμείται με τον αριθμό -1, η αμέσως βαρυτέρα με το -2 κοκ.

Κάθε φθόγγος όπου σχηματίζει διάστημα δ με τη βάση, απέχει Κ οκτάχορδα, απ' τον αντίστοιχό του της βασικής κλίμακος.

Αλλαγή κλίμακος

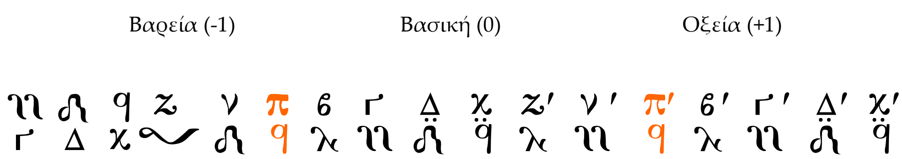
Ένα διάστημα δ που ανήκει στην κλίμακα Κ, μπορώ να το εκφράσω ως διάστημα δ', που ανήκει στην κλίμακα Κ' με την βοήθεια του ***μαθηματικού τύπου***:

$$\delta' = \delta \cdot 2^{K'-K}$$

ή αναλυτικότερα:

$$\delta' = \delta \cdot 2^{K'-[\log_2 \delta]}$$

Η κλίμακα λοιπόν επαναλαμβάνεται με την ίδια σειρά φθόγγων, βαρύτερα και οξύτερα της αρχικής, ενώ διατηρείται πάντα η, μεταξύ των βαθμίδων της, σχέση.



Η συνήθης έκταση της ανθρώπινης φωνής είναι περίπου 2 οκτάχορδα (δις διαπασών).
Βλέπουμε τη διαδοχή των φθόγγων, άνω και κάτω της διατονικής κλίμακος του Πα.
Στην έκταση αυτή, «ψάλλονται» όλα τα άσματα της καθόλου Βυζαντινής Μουσικής,
απ' την αρχαιότητα έως τις μέρες μας.

Πυθαγόρειος Κλίμακα

Κατατομή Κανόνος

Η κατατομή κανόνος της αρμονίας (8χ), γίνεται με τη βοήθεια των φυσικών του ημιτονίων, της συλλαβής (4χ) ως αρμονικού μέσου και της διοξείας (5χ) ως αριθμητικού μέσου.

Με Αρμονίες και διοξείες

Για την κατατομή κανόνος, δηλαδή, την κατάτμηση της κλίμακος, ο Πυθαγόρας, χρησιμοποιεί τα δύο πλέον σύμφωνα διαστήματα του 8χ και του 5χ.

Αριθμητικά, το 5χ βρίσκεται ακριβώς στη μέση του διαστήματος του 8χ, αφού ο λόγος του 3/2=1.5, είναι η μέση αριθμητική τιμή (μέσος όρος) του διαστήματος από 1 έως 2/1.

Μέσος όρος

Μέσος όρος m των $a, b \in \mathbf{N}$, $m = \dfrac{a+b}{2}$.

α. Προσθέτοντας 8χ και αφαιρώντας 5χ

Ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε μια ελεύθερη χορδή ως αρχικό διάστημα 1 (1η βαθμίδα), στην οποία, προσθαφαιρούσε διαστήματα 8χ και 5χ. Όταν η νέα βαθμίδα, είναι μεγαλύτερη απ’ το 2, τότε βρισκόμαστε στην οξεία κλίμακα, οπότε θα πρέπει να αφαιρέσουμε ένα 8χ, για να επανέλθουμε στη βασική.

Εύρεση των βαθμίδων της κλίμακος:

			βασική κλίμακα (0)				οξεία κλίμακα (+1)			
1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	9η	10η	11η
								1΄η	2΄η	3΄η	4΄η

Η βασική κλίμακα και η οξεία κλίμακα.
Τα διαστήματα ανάμεσα στις βαθμίδες 1η-1΄η, 2η-2΄η, 3η-3΄η κτλ είναι διαστήματα 8χ

Μετά την 8η, οι βαθμίδες μπορούν να αριθμηθούν βάσει της 1η βαθμίδος της κλίμακος, 9η , 10η … κλπ ή βάση της 8η βαθμίδος, η οποία γίνεται 1'η της οξείας κλίμακος, οπότε οι άλλες αριθμούνται ως 2'η, 3'η, 4'η κλπ.

α. Προσθέτοντας ένα 8χ, σε μια αυθαίρετη συχνότητα (1), την οποία θεωρούμε ως βάση της κλίμακος και 1η βαθμίδα, παράγουμε την 8η βαθμίδα (2/1).

β. Αφαιρώντας ένα 5χ, απ' την 8η βαθμίδα, παράγουμε την 4η (5χ+4χ=8χ):

$$8\chi - 5\chi = \frac{2}{1} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \ (4\chi)$$

γ. Προσθέτοντας ένα 8χ στην 4η, παράγουμε την 11η (4η+8χ=4'η ή 11η), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 5χ, παράγουμε την 7η:

$$4\chi + 8\chi = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{3} > 2, \text{ οπότε } \frac{8}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{16}{9}$$

δ. Αφαιρώντας ένα 5χ, απ' την 7η βαθμίδα, παράγουμε την 3η:

$$7^{\eta} - 5\chi = \frac{16}{9} \div \frac{3}{2} = \frac{32}{27}$$

ε. Προσθέτοντας ένα 8χ στην 3η, παράγουμε την 11η (3η+8χ=3'η ή 10η), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 5χ, παράγουμε την 6η:

$$3^{\eta} + 8\chi = \frac{32}{27} \cdot \frac{2}{1} = \frac{64}{27} > 2, \text{ οπότε } \frac{64}{27} \div \frac{3}{2} = \frac{128}{81}$$

στ. Αφαιρώντας ένα 5χ, απ' την 6η βαθμίδα, παράγουμε τη 2η:

$$6^{\eta} - 5\chi = \frac{128}{81} \div \frac{3}{2} = \frac{256}{243}$$

ζ. Προσθέτοντας ένα 8χ στην 2η, παράγουμε την 9η (2η+8χ=2'η ή 9η), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 5χ, παράγουμε την 5η:

$$2^{\eta} + 8\chi = \frac{256}{243} \cdot \frac{2}{1} = \frac{512}{243} > 2, \text{ οπότε } \frac{512}{243} \div \frac{3}{2} = \frac{1024}{729}$$

Ταξινομώντας τις βαθμίδες της κλίμακος κατ’ αύξουσα σειρά έχουμε:

Βαθμίδα	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Διάστημα ως προς την 1η	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{2}{1}$

Το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών βαθμίδων καλείται βήμα. Έτσι είναι προφανές, ότι το βήμα της 1ης_2ης βαθμίδος είναι $\frac{256}{243}$.

Το βήμα 2ης_3ης είναι $\frac{32}{27} \div \frac{256}{243} = \frac{7776}{6912} = \frac{9}{8}$.

Με όμοιο τρόπο, υπολογίζουμε τα υπόλοιπα βήματα της κλίμακος, όπου φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Βαθμίδα	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Διάστημα ως προς την 1η	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{2}{1}$
Βήμα	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	

Κλίμακα με βάση τον Ζω (Μιξολύδιος)

Απ’ την κατατομή αυτή, προκύπτει η κλίμακα της μορφής 4χ-4χ-Τ, με δώρια 4χ Λ-Τ-Τ.

β. Προσθέτοντας 5χ και αφαιρώντας 8χ

Ακολουθώντας διαφορετική πορεία, κατασκευάζουμε την κλίμακα με τη χρήση των διαστημάτων του 8χ και 5χ. Τα επιμέρους βήματα εύρεσης των βαθμίδων της κλίμακος, είναι παρόμοια με τον 1ο τρόπο κατασκευής.

Εύρεση των βαθμίδων της κλίμακος:

βασική κλίμακα οξεία κλίμακα

1η 2η 3η 4η 5η 6η 7η 8η 9η 10η 11η

1’η 2’η 3’η 4’η

Η βασική κλίμακα και η οξεία κλίμακα.
Το διάστημα ανάμεσα στις βαθμίδες 1η-1’η, 2η-2’η, 3η-3’η κτλ είναι διάστημα 8χ

α. Προσθέτοντας ένα 5χ, σε μια αυθαίρετη συχνότητα (1), την οποία θεωρούμε ως βάση της κλίμακος και 1η βαθμίδα, παράγουμε την 5η βαθμίδα (3/2).

β. Προσθέτοντας ένα 5χ στην $5^{η}$, παράγουμε την $9^{η}$ ($5^{η}$+8χ=$12'^{η}$ ή $5'^{η}$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 8χ, παράγουμε τη $2^{η}$:

$$5^{η} + 5χ = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2, \text{ οπότε } \frac{9}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{9}{8}$$

γ. Προσθέτοντας ένα 5χ στη $2^{η}$, παράγουμε την $6^{η}$:

$$2^{η} + 5χ = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

δ. Προσθέτοντας ένα 5χ στην $6^{η}$, παράγουμε τη $10^{η}$ ($6^{η}$+5χ=$3'^{η}$ ή $10^{η}$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 8χ, παράγουμε την $3^{η}$:

$$6^{η} + 5χ = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32} > 2, \text{ οπότε } \frac{81}{32} \div \frac{2}{1} = \frac{81}{64}$$

ε. Προσθέτοντας ένα 5χ στην $3^{η}$, παράγουμε την $7^{η}$:

$$3^{η} + 5χ = \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$$

στ. Προσθέτοντας ένα 5χ στην $7^{η}$, παράγουμε την $11^{η}$ ($7^{η}$+5χ=$4'^{η}$ ή $11^{η}$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 8χ, παράγουμε την $4^{η}$:

$$7^{η} + 5χ = \frac{243}{128} \cdot \frac{3}{2} = \frac{729}{256} > 2, \text{ οπότε } \frac{729}{256} \div \frac{2}{1} = \frac{729}{512}$$

Η $8^{η}$ βαθμίδα βρίσκεται σε απόσταση 8χ, δηλαδή 2/1.

Ταξινομώντας τις βαθμίδες της κλίμακος κατ' αύξουσα σειρά και αφού υπολογίσουμε τα ενδιάμεσα βήματα, έχουμε:

Βαθμίδα	**$1^{η}$**	**$2^{η}$**	**$3^{η}$**	**$4^{η}$**	**$5^{η}$**	**$6^{η}$**	**$7^{η}$**	**$8^{η}$**
Διάστημα ως προς την $1^{η}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$
Βήμα		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Κλίμακα με βάση τον Γα (Υπολύδιος)

Απ' την κατατομή αυτή, προκύπτει η ίδια κλίμακα με άλλο τρόπο διαδοχής των ιδίων βημάτων, του τόνου και του λήμματος, της μορφής Τ-4χ-4χ, με λύδια 4χ Τ-Τ-Λ.

Με Αρμονίες και συλλαβές

Κατατομή Κανόνος, με χρήση των ετέρων σύμφωνων διαστημάτων του 8χ και του 4χ.

Το 4χ είναι ο αρμονικός μέσος του διαστήματος 1 έως 2/1.

Αρμονικός μέσος

Αρμονικός μέσος r των $a, b \in \mathbf{N}$, $r = \dfrac{2ab}{a+b}$.

γ. Προσθέτοντας 8χ και αφαιρώντας 4χ

Η κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος, γίνεται με τη χρήση των διαστημάτων του 8χ και του 4χ. Τα επιμέρους βήματα εύρεσης των βαθμίδων της κλίμακος, είναι όμοια με τον 1ο τρόπο κατασκευής.

Εύρεση των βαθμίδων της κλίμακος:

			βασική κλίμακα				οξεία κλίμακα			
1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	9η	10η	11η
							1'η	2'η	3'η	4'η

Η βασική κλίμακα και η οξεία κλίμακα.
Το διάστημα ανάμεσα στις βαθμίδες 1η-1'η, 2η-2'η, 3η-3'η κτλ είναι διάστημα 8χ

α. Προσθέτοντας ένα 8χ, σε μια αυθαίρετη συχνότητα (1), την οποία θεωρούμε ως βάση της κλίμακος και 1η βαθμίδα, παράγουμε την 8η βαθμίδα (2/1).

β. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την 8η βαθμίδα, παράγουμε την 5η (5χ+4χ=8χ):

8χ - 4χ = $\dfrac{2}{1} \div \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ (5χ)

γ. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την 5η βαθμίδα, παράγουμε τη 2η:

5χ - 4χ = $\dfrac{3}{2} \div \dfrac{4}{3} = \dfrac{9}{8}$ (Τ)

δ. Προσθέτοντας ένα 8χ στη $2^η$, παράγουμε την $9^η$ ($2^η$+8χ=$2'^η$ ή $9^η$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 4χ, παράγουμε την $6^η$:

$$2^η + 8χ = \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{18}{8} > 2, \text{ οπότε } \frac{18}{8} \div \frac{4}{3} = \frac{54}{32} = \frac{27}{16}$$

ε. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την $6^η$ βαθμίδα, παράγουμε την $3^η$:

$$6^η - 4χ = \frac{27}{16} \div \frac{4}{3} = \frac{81}{64}$$

στ. Προσθέτοντας ένα 8χ στην $3^η$, παράγουμε τη $10^η$ ($3^η$+8χ=$3'^η$ ή $10^η$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 4χ, παράγουμε την $7^η$:

$$3^η + 8χ = \frac{81}{64} \cdot \frac{2}{1} = \frac{162}{64} > 2, \text{ οπότε } \frac{162}{64} \div \frac{4}{3} = \frac{486}{256} = \frac{243}{128}$$

ζ. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την $7^η$ βαθμίδα, παράγουμε την $4^η$:

$$7^η - 4χ = \frac{243}{128} \div \frac{4}{3} = \frac{729}{512}$$

Ταξινομώντας τις βαθμίδες της κλίμακος κατ' αύξουσα σειρά και αφού υπολογίσουμε τα ενδιάμεσα βήματα, έχουμε:

Βαθμίδα	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$	$7^η$	$8^η$
Διάστημα ως προς την $1^η$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$
Βήμα	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Κλίμακα με βάση τον Γα (Υπολύδιος)

Απ' την κατατομή αυτή, προκύπτει η ίδια κλίμακα με άλλο τρόπο διαδοχής των ιδίων βημάτων, του τόνου και του λήμματος, της μορφής Τ-4χ-4χ, με λύδια 4χ Τ-Τ-Λ.

δ. Προσθέτοντας 4χ και αφαιρώντας 8χ

Η κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος, γίνεται με τη χρήση των διαστημάτων του οκταχόρδου και του τετραχόρδου. Τα επιμέρους βήματα εύρεσης των βαθμίδων της κλίμακος, είναι όμοια του 1ου τρόπου κατασκευής.

Εύρεση των βαθμίδων της κλίμακος:

		βασική κλίμακα				οξεία κλίμακα				
1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	9η	10η	11η
							1′η	2′η	3′η	4′η

Η βασική κλίμακα και η οξεία κλίμακα.
Το διάστημα ανάμεσα στις βαθμίδες 1η-1′η, 2η-2′η, 3η-3′η κτλ είναι διάστημα 8χ

α. Προσθέτοντας ένα 4χ, σε μια αυθαίρετη συχνότητα (1), την οποία θεωρούμε ως βάση της κλίμακος και 1η βαθμίδα, παράγουμε την 4η βαθμίδα (4/3).

β. Προσθέτοντας ένα 8χ στην 4η, παράγουμε την 11η (4η+8χ=4′η ή 11η), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 4χ, παράγουμε την 8η:

$$4^{\eta} + 8\chi = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{8}{3} > 2, \text{ οπότε } \frac{8}{3}\div\frac{4}{3} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$$

γ. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την 8η βαθμίδα, παράγουμε την 5η (5χ+4χ=8χ):

$$8\chi - 4\chi = \frac{2}{1}\div\frac{4}{3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\ (5\chi)$$

δ. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την 5η βαθμίδα, παράγουμε τη 2η:

$$5^{\eta} - 4\chi = \frac{3}{2}\div\frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

ε. Προσθέτοντας ένα 8χ στη 2η, παράγουμε την 9η (2η+8χ=2′η ή 9η), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 4χ, παράγουμε την 6η:

$$2^{\eta} + 8\chi = \frac{9}{8}\cdot\frac{2}{1} = \frac{18}{8} > 2, \text{ οπότε } \frac{18}{8}\div\frac{4}{3} = \frac{54}{32} = \frac{27}{16}$$

στ. Αφαιρώντας ένα 4χ, απ' την 6η βαθμίδα, παράγουμε την 3η:

$$6^{\eta} - 4\chi = \frac{27}{16}\div\frac{4}{3} = \frac{81}{64}$$

ζ. Προσθέτοντας ένα 8χ στην $3^η$, παράγουμε την $11^η$ ($3^η$+8χ=$3'^η$ ή $10^η$), η οποία βρίσκεται έξω απ' την κλίμακα, οπότε με την αφαίρεση ενός 4χ, παράγουμε την $7^η$:

$$3^η + 8χ = \frac{81}{64} \cdot \frac{2}{1} = \frac{162}{64} > 2, \text{ οπότε } \frac{162}{64} \div \frac{4}{3} = \frac{486}{256} = \frac{243}{128}$$

Ταξινομώντας τις βαθμίδες της κλίμακος κατ' αύξουσα σειρά και αφού υπολογίσουμε τα ενδιάμεσα βήματα, έχουμε:

Βαθμίδα	$1^η$		$2^η$		$3^η$		$4^η$		$5^η$		$6^η$		$7^η$		$8^η$
Διάστημα ως προς την $1^η$	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{81}{64}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$		$\frac{2}{1}$
Βήμα		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	

Κλίμακα με βάση τον Νη (Λύδιος)

Απ' την κατατομή αυτή, προκύπτει η ίδια κλίμακα με άλλο τρόπο διαδοχής των ιδίων βημάτων, του τόνου και του λήμματος, της μορφής 4χ-Τ-4χ, με λύδια 4χ Τ-Τ-Λ.

<u>Με διοξείες</u>

<u>ε. Προσθέτοντας διαδοχικά 5χ</u>

Η κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος γίνεται με προσθήκη διαδοχικών 5χ στη βάση της κλίμακος.

Η διαδικασία θα επαναληφθεί 6 φορές για την εύρεση των ενδιάμεσων 6 βαθμίδων, αφού η $1^η$ (1) και η $8^η$ (2/1), είναι γνωστές.

Η ανάβαση με διαδοχικά 5χ, εκφράζεται με την ύψωση του λόγου του 5χ, σε δυνάμεις του 1, 2, 3, 4, 5 και 6.

$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6$

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε:

$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

Υπολογίζουμε την κλίμακα Κ όπου βρίσκεται το εκάστοτε διάστημα δ, και το μεταφέρουμε στη βασική, μετατρέποντάς το στο δ′.

δ	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$
Κ	0	1	1	2	2	3
δ′	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$

Αφού προσθέτουμε την 1η (1) και την 8η (2/1) βαθμίδα, τις ταξινομούμε κατά αύξουσα σειρά, δημιουργώντας την κλίμακα:

Βαθμίδα	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Διάστημα ως προς την 1η	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$
Βήμα		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Κλίμακα με βάση τον Γα (Υπολύδιος)

Απ′ την κατατομή αυτή, προκύπτει η ίδια κλίμακα με άλλο τρόπο διαδοχής των ιδίων βημάτων, του τόνου και του λήμματος, της μορφής Τ-4χ-4χ, με λύδια 4χ Τ-Τ-Λ.

Με τον παρόντα τρόπο, αν αφαιρούμε διαδοχικά 5χ, θα κατασκευάσουμε τον Μιξολύδιο τρόπο, δηλαδή: Λ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ, όπως με τον 1ο τρόπο κατασκευής.

Με συλλαβές

στ. Αφαιρώντας διαδοχικά 4χ

Η κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος γίνεται και με αφαίρεση διαδοχικών 4χ απ' τη βάση της κλίμακος, ακολουθώντας τον αλγόριθμο του προηγούμενου τρόπου κατασκευής.

Ο πίνακας που ακολουθεί, περιγράφει εν συντομία τα βήματα:

αφαιρώ 4/3	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{-6}$
προσθέτω 3/4	$\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$
δ	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{243}{1024}$	$\frac{729}{4096}$
Κ	-1	-1	-2	-2	-3	-3
δ'$_0$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$

Η αφαίρεση 4χ, γίνεται με την πρόσθεση του αντίστροφου λόγου: προσθέτω 3/4, σημαίνει αφαιρώ 4/3.
Έτσι, για την αφαίρεση διαδοχικών 4χ (4/3), θα έχουμε αρνητικούς εκθέτες,
ενώ για την πρόσθεση διαδοχικών 4χ (3/4), θετικούς εκθέτες.

Η κλίμακα έχει τη γνωστή μορφή Τ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Λ, του Υπολυδίου τρόπου από Γα.

Με τον παρόντα τρόπο, αν προσθέτουμε διαδοχικά 4χ (4/3), θα κατασκευάσουμε τον Μιξολύδιο τρόπο, δηλαδή: Λ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ, όπως με τον 1ο τρόπο κατασκευής ή με την αφαίρεση διαδοχικών 5χ.

Συμπερασματικά

Οι μορφές της σκληρής Πυθαγορείου κλίμακος όπου εμφανίζονται στους 6 τρόπους κατασκευής της, είναι 3:

α) Λ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ,

β) Τ_Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Λ και

γ) Τ_Τ_Λ_Τ_Τ_Τ_Λ.

Ο 1ος τρόπος καταλήγει στην α′ μορφή, ο 2ος και ο 3ος στη β′, ο 4ος στην γ′, ο 5ος, με διαδοχικά προς το οξύ 5χ, στη β′, ενώ προς το βαρύ, στην α′ και ο 6ος, με διαδοχικά προς το οξύ 4χ, στην α′, ενώ προς το βαρύ, στη β′.

Παρατηρούμε ότι το 5χ και το 4χ, σαν συμπληρωματικά διαστήματα, παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η μορφή της κλίμακος όπου καταλήγουν τα διαδοχικά προς το οξύ 5χ, είναι ίδια με τα διαδοχικά προς το βαρύ 4χ. Επίσης, η μορφή της κλίμακος όπου καταλήγουν τα διαδοχικά προς το βαρύ 5χ, είναι ίδια με τα διαδοχικά προς το οξύ 4χ.

Η παρουσίαση των τρόπων κατασκευής της Πυθαγορείου κλίμακος έγινε τόσο αναλυτικά, αφενός μεν, διότι αποτελεί την πλέον σημαντική κλίμακα, αφού είναι ο γεννήτορας όλων των υπολοίπων κλιμάκων, αφετέρου δε, καταλήγουμε σε χρήσιμα συμπεράσματα. Αν καταλάβουμε, αναλύσουμε, και αφομοιώσουμε τους 8 στην ουσία, τρόπους κατασκευής, τόσο ώστε να τους αναπαράγουμε στο χαρτί μόνοι μας, θα διαπιστώσουμε ότι όλοι κινούνται με τον ίδιο τρόπο, στα ίδια μονοπάτια. Και οι 8 τρόποι κατασκευής είναι όμοιοι και όλοι καταλήγουν στην ίδια κλίμακα, με διαφορετική, ενίοτε, μορφή.

Οι παραπάνω υπολογισμοί διαστημάτων, μπορούν να γίνουν και με πράξεις δυνάμεων του 2 και του 3, όπου όλοι ξέρουμε, ότι κάθε Πυθαγόρειο διάστημα μπορεί να γραφεί σαν λόγος δυνάμεων $\left(\frac{2^a}{3^b}\right)^c$***, όπου*** $a,b \in N$ ***και*** $c \in \{-1,1\}$.

Πυθαγόρειος κλίμακα

Η Πυθαγόρειος κλίμακα, όπως βλέπουμε, δομείται από δύο διαφορετικά βήματα, τον Πυθαγόρειο **Τόνο** (Τ) $\frac{9}{8}$ και το Πυθαγόρειο ημιτόνιο $\frac{256}{243}$, το οποίο καλείται και **Λήμμα** (Λ).

Το λήμμα είναι μικρότερο διάστημα απ' το μισό του τόνου, 2Λ < Τ, διότι: $\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049} < \frac{9}{8}$, οπότε, αν αφαιρέσουμε το λήμμα απ' τον τόνο, θα προκύψει διάστημα μεγαλύτερο απ' αυτό $\mathrm{T} - \Lambda = \frac{9}{8} \div \frac{256}{243} = \frac{2187}{2048}$, το οποίο διάστημα καλείται **Αποτομή** (Α), συνεπώς Α = Τ - Λ <=> Τ = Λ + Α.

Η αποτομή, τέλος διαφέρει απ' το λήμμα κατά διάστημα $\frac{2187}{2048} \div \frac{256}{243} = \frac{531441}{524288}$, όπου καλείται **κόμμα** (Κ) και είναι το μικρότερο διάστημα στην Πυθαγόρεια κλίμακα.

Αλλά και $\mathrm{K} = \mathrm{A} - \Lambda \Rightarrow \mathrm{K} = \mathrm{T} - \Lambda - \Lambda \Leftrightarrow \mathrm{K} = \mathrm{T} - 2\Lambda$, διότι:

$$\frac{9}{8} \div \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{9}{8} \div \frac{65536}{59049} = \frac{531441}{524288}.$$

Το Πυθαγόρειο κόμμα λοιπόν, σαν το μικρότερο διάστημα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο για τα υπόλοιπα διαστήματα της Πυθαγορείου κλίμακος, το οποίο, μετατρέποντάς το σε Cents βρίσκουμε $1200 \log_2 \frac{531441}{524288} = 23.46\,\mathrm{Cents}$.

Μετατρέπουμε κάθε διάστημα σε Cents, χωρίς στρογγυλοποίηση και το διαιρούμε με τα 23.46 Cents του Πυθαγορείου κόμματος, ώστε να βρούμε σε πόσα κόμματα αντιστοιχεί.

Πυθαγόρεια διαστήματα	Διάστημα δ	Cents	Κόμματα
Κλίμακα	$\frac{2}{1}$	1200	51.15
Τόνος	$\frac{9}{8}$	203.91	8.6918
Αποτομή	$\frac{2187}{2048}$	113.685	4.846
Λήμμα	$\frac{256}{243}$	90.225	3.846
Κόμμα	$\frac{531441}{524288}$	23.46	1

Υποδιαίρεση Κλίμακος

Λαμβάνοντας ως δεδομένο, ότι ο αριθμός των κομμάτων της κλίμακος πρέπει να είναι ακέραιος και στρογγυλεύοντας τις τιμές των κομμάτων (round), έχουμε:

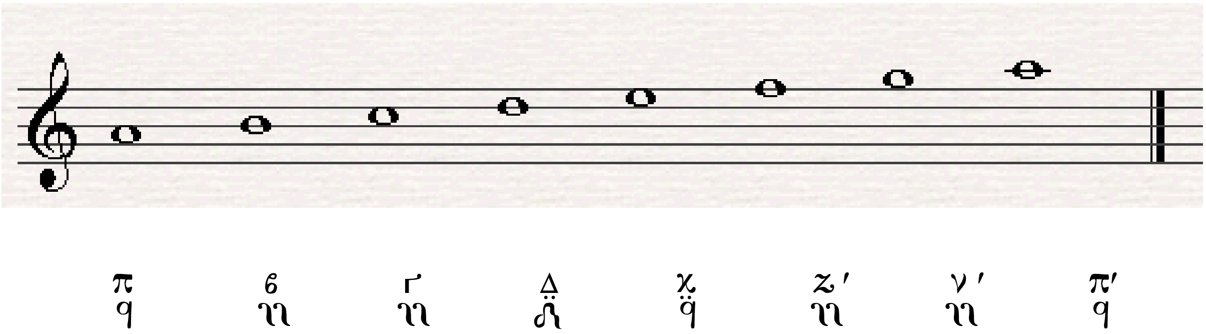
Πυθαγόρεια διαστήματα	Κόμματα
Τόνος	9
Αποτομή	5
Λήμμα	4

Η κλίμακα λοιπόν, που περιέχει 5 Τ και 2 Λ, διαιρείται σε 53 κόμματα.

Την παραπάνω διαίρεση ακολουθεί και ο Τούρκος μουσικολόγος Rauf Yehta Bey, στις αρχές του 20^{ου} αι, μια αναβίωση, της Πυθαγορείου κλίμακος, όπου αποτελεί τη βάση της σημερινής Κλασσικής Μουσικής της Ανατολής, η οποία καταγράφεται στο πεντάγραμμο Donizetti, με μια μικρή όμως διαφοροποίηση, τα ανόμοια 4χ.

Πεντάγραμμο Donizetti

Η κλίμακα που καταγράφεται στο πεντάγραμμο Donizetti χωρίς καμία αλλοίωση, είναι μια μικτή κλίμακα, τρόπον τινά, αποτελούμενη από δύο ανόμοια 4χ.



Η παραπάνω μουσική κλίμακα, είναι η κλίμακα του Μακάμ Μπουσελίκ, με διαζευγμένα 4χ ussak (Φρύγιο) και kurdi (Δώριο), επί το οξύ.

Κατά τη Βυζαντινή ορολογία, Ήχος πλ. Ά, σκληρός πεντάφωνος ***(δεν υπάρχει απόλυτη αντιστοιχία, αλλά ούτε και ταύτιση μεταξύ Μακάμ και Ήχου)***.

Η κλίμακα του Μακάμ Μπουσελίκ, είναι τρόπον τινά, ο γεννήτορας όλων των άλλων κλιμάκων των Μακάμ, οι οποίες προκύπτουν, με κατάλληλα σημεία αλλοιώσεων.

Επίλογος

Στο χωρισμό αυτόν του Πυθαγόρα, όπου ακολουθούν σήμερα σε θεωρία και πράξη οι «φίλοι» και «γείτονές» μας, πρέπει να στραφούμε με δέος και σεβασμό, χωρίς καμιά προκατάληψη.

Η διαίρεση της κλίμακος είναι απ' τα σπουδαιότερα ζητήματα στην Ελληνική μουσική ημών, καθώς όλοι γνωρίζουμε τις ατέλειες και τα προβλήματα του συγκερασμού των 72 ή 68 κομμάτων, πολύ δε περισσότερο, του χοντροκομμένου δυτικού συστήματος των 12 ημιτονίων, όπου πολλοί ψάλλουν και τραγουδούν σήμερα.

Ο χωρισμός της κλίμακος δεν αποτελεί «αιρετικό» θέμα στην Εκκλησιαστική Βυζαντινή μας μουσική, όπως δεν αποτελεί αίρεση στην πίστη μας, η τέλεση των εορτών του ενιαυτού με το παλαιό ημερολόγιο.

Ο χωρισμός βεβαίως σε 12 κόμματα, ασφαλώς θα ήταν «αιρετικός», για τα μουσικά πεπραγμένα, ο χωρισμός όμως σε 53 κόμματα, δεν είναι, διότι αποτελεί την τελειοτέρα προσέγγιση συγκερασμού στο πλείστο των κλιμάκων που θα δείξουμε στην παρουσίαση με θέμα: «Βέλτιστος συγκερασμός του οκταχόρδου με επιστημονική μέθοδο, για κάθε κλίμακα».

Βιβλιογραφία

1. Κ. Δ. Αλεξοπούλου, Γενική Φυσική, Τόμος Ι Μηχανική – Ακουστική, Αθήνα 1960
2. Θ. Γ. Κουγιουμζέλη – Σ. Γ. Περιστεράκη, Στοιχεία Φυσικής, Τόμος ΙΙ Κυματική, Αθήνα 1963
3. Δημητράτου, Μείζον Λεξικό όλης της Ελληνικής γλώσσης, Αθήνα 1964
4. Φυσική Γ΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ Έκδοση Δ΄, Αθήνα 1986
5. Χρήστου Σπυρίδη, Μια εισαγωγή στη φυσική της μουσικής, Θεσσαλονίκη 1986
6. Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια, τομ. 14-15, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΦΥΣΙΚΗ – ΧΗΜΕΙΑ, Εκδοτική Αθηνών 1991
7. Εγκυκλοπαίδεια Πάπυρος – Λαρούς – Μπριτάνικα, Εκδ: Πάπυρος Γραφικαί Τέχναι Α.Ε., 2006

Μουσικά

8. Χρυσάνθου Μαδυτινού, Μέγα θωρητικόν της Μουσικής, Τεργέστη 1832, Επανέκδ: Κουλτούρα
9. Στοιχειώδης διδασκαλία της Εκκλησιαστικής Μουσικής εκπονηθείσα επί τη βάση του ψαλτηρίου υπό της μουσικής επιτροπής του Οικουμενικού Πατριαρχείου εν έτει 1883
10. Χαραλάμπους Οικονόμου, Βυζαντινής Μουσικής Χορδή, Πάφος 1940
11. Ιωάννου Μαργαζιώτη, Θεωρητικό Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής, 1958
12. Μιχαήλ Χατζηαθανασίου, Αι βάσεις της Βυζαντινής Μουσικής, Κωνσταντινούπολη 1948
13. Αστερίου Δερβελή, Πηδάλιον – Μέθοδος Βυζαντινής Μουσικής, Θεσσαλονίκη 1989
14. Κυριάκου Καλαϊτζίδη, το ούτι, Τόμος Α΄, Εκδ: ΕΝ ΧΟΡΔΕΣ, Θεσσαλονίκη 1996
15. Μάριου Μαυροειδή, Οι μουσικοί τρόποι στην Ανατολική Μεσόγειο, Εκδ: Fagotto, Αθήνα 1999
16. M. L. West , Αρχαία Ελληνική Μουσική, Εκδ: Παπαδήμα, Αθήνα 2004
17. Κατερίνα Παπαοικονόμου Κηπουργού, Η μουσική στην Αρχαία Ελλάδα, Εκδ: Γεωργιάδη, 2007